

Analyse (04/05)

Toets I, Woensdag 18 mei,
duur: 45 min.

- 1[1] Stel $A \subset \mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{R}^m$ is een verdichtingspunt van A , $f : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ en $\ell \in \mathbb{R}^k$.
(i)[2] Wat betekent het dat p een verdichtingspunt van A is? Geef een eenvoudig voorbeeld waaruit blijkt dat p niet tot A behoort te horen.
(ii)[2] Geef de ε, δ definitie van $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \ell$.
(iii)[1] Stel nu $p \in A$. Geef de definitie van f is continu in p .
(iv)[4] Onderzoek of de functie

$$f(x, y) = \frac{xy}{x + y}$$

gedefineerd op

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$$

(a) een limiet heeft in $(0, 0)$ en (b) continu is op A (wat betekent dit?). Licht je antwoord toe: bij (a) met een ε, δ argument en bij (b) met een beroep op één of meerdere stellingen.

2[1] (i)[3] Geef de definitie van $K \subset \mathbb{R}^m$ is compact en twee andere equivalent formuleringen.

(ii)[2] Formuleer de stelling van Weierstrass.

(iii)[4] Stel $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ is continu en $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

(a) Geef de M, R definitie van bovenstaande limiet en (b) toon met behulp van de stelling van Weierstrass aan dat f een minimum waarde aanneemt.

31 Stel $O \subset \mathbb{R}^m$ is open, $a \in O$ en $f : O \rightarrow \mathbb{R}$.

(i)[2] Geef de definitie van f is differentieerbaar in a . Wat betekent " $o(\|h\|)$ als $h \rightarrow 0$ "?

(ii)[1] Hoe bereken je mat $f'(a)$ als f differentieerbaar is in a ?

(iii)[2] Zijn de volgende uitspraken waar of niet waar? Verklaar je antwoord eventueel met een tegenvoorbeeld.

(a) Als f continu is in a dan is f differentieerbaar in a .

(b) De richtingsafgeleide van f in a is eigenlijk de afgeleide van een functie van één variabele.

(iv)[4] Bereken van de functie

$$f(x, y) = xy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

(a) de afgeleide in het punt (a, b) en (b) de richtingsafgeleide in de richting $u = (u_1, u_2)$ in het punt (a, b) . Voor (a) hoef je geen ε, δ bewijs te geven, maar wel de afschattingen die voor een dergelijk bewijs nodig zijn. Doe bij (b) beroep op één of meerdere stellingen.